

Piotr Grabowski

# Prosto do matury

## Program nauczania matematyki

dla szkół ponadgimnazjalnych  
kończących się maturą

Kształcenie ogólne  
w zakresie podstawowym  
i rozszerzonym



# Spis treści

Wstęp .....	3
Cele kształcenia .....	4
Procedury osiągnięcia celów .....	5
Materiał nauczania i przewidywane umiejętności uczniów .....	7
<b>Klasa I</b>	
Treści nauczania .....	7
Przewidywane umiejętności uczniów .....	9
<b>Klasa II</b>	
Treści nauczania .....	12
Przewidywane umiejętności uczniów .....	15
<b>Klasa III</b>	
Treści nauczania .....	17
Przewidywane umiejętności uczniów .....	19
Propozycja metod kontroli i oceny osiągnięć .....	21
Katalog wymagań programowych .....	23
Orientacyjny przydział godzin .....	36

## Wstęp

*W matematyce umiejętności są znacznie ważniejsze od wiadomości, dlatego też w nauczaniu matematyki to, jak uczyliśmy, może być ważniejsze od tego, czego uczyliśmy.*  
 György Polya

*Program nauczania matematyki dla szkół ponadgimnazjalnych. Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym w pełni respektuje założenia reformy szkolnictwa oraz zatwierdzonej przez MEN Podstawy programowej kształcenia ogólnego z dn. 27.08.2012 r.*

Treści nauczania w zasadzie nie wykraczają poza hasła podstawy. Matematyka, przedmiot obowiązkowo zdawany na maturze w zakresie podstawowym, powinna być opanowana w stopniu co najmniej dostatecznym przez każdego ucznia. Nie jest to zadanie łatwe ani dla uczniów, ani dla nauczycieli. Autor prezentowanego programu wyznaje zasadę, że lepiej zawrzeć w nim mniej treści, za to łatwiejszych do przyswojenia i dobrego zrozumienia. Wysiłek ucznia oraz nauczyciela powinien być racjonalny i twórczy, a nie mechaniczny. Tym bardziej, że matematyka daje każdemu nauczycielowi ogromne możliwości poszerzania materiału o ciekawe lub trudniejsze zadania. Wystarczy wspomnieć, że bardzo interesujące zadania na poziomie olimpiad matematycznych dotyczą teorii liczb, wielomianów czy geometrii! Lekcje nie powinny być nudne, nawet dla bardzo zdolnego ucznia, zarówno realizującego program matematyki w zakresie podstawowym, jak i w zakresie rozszerzonym.

Niniejsza pozycja składa się z kilku części. Na początku wymienione zostały najważniejsze cele edukacyjne i wychowawcze kształcenia w zakresie matematyki. Kolejną część programu poświęcono procedurom osiągania celów oraz metodom sprawdzania i oceny osiągnięć uczniów. Dalej omówiony został materiał nauczania wraz z przewidywanymi osiągnięciami uczniów. Na końcu zamieszczono uwagi na temat realizacji programu z podaniem orientacyjnego przydziału godzin.

Zrealizowanie celów nauczania wymaga czasu. Przy obowiązującej siatce godzin nie jest go zbyt wiele. Do decyzji nauczyciela należy wybór, czy realizować podaną propozycję, czy dokonać w niej pewnych korekt. Nie można zakładać jednolitego schematu nauczania nawet w obrębie jednego programu. Dobór form i metod nauczania musi być dostosowany do konkretnych warunków – liczby uczniów, wyposażenia szkoły, planu zajęć itp.

Do niniejszego programu wydawnictwo Nowa Era przygotowuje pakiet zawierający podręczniki dla uczniów oraz poradniki metodyczne dla nauczycieli.

## Cele kształcenia

Nauka matematyki powinna wspomagać rozwój intelektualny ucznia, przygotowywać go do działań zespołowych, przyczyniać się do wszechstronnego kształtowania jego osobowości oraz pomóc mu w poznawaniu i rozumieniu problematyki rozwoju kraju i świata.

### Cele edukacyjne

- opanowanie umiejętności uogólniania przykładów, formułowania hipotez i twierdzeń, przeprowadzania prostych rozumowań dedukcyjnych;
- opanowanie umiejętności podawania przykładów i kontrprzykładów, definiowania pojęć oraz posługiwania się definicją;
- wykształcenie umiejętności budowania modeli matematycznych różnorodnych sytuacji z życia codziennego oraz ich wykorzystania do rozwiązywania problemów;
- opanowanie umiejętności potrzebnych do ilościowej oceny i opisu różnych zjawisk;
- wykształcenie wyobraźni przestrzennej przez wyznaczanie związków metrycznych i miarowych w figurach geometrycznych, także w otaczającej na rzeczywistości;
- nauczenie wykrywania związków między liczbowymi parametrami zjawisk, szacowania wartości tych parametrów, opisywania związków pomiędzy nimi za pomocą równań i nierówności, wykrywania między nimi zależności funkcyjnych lub rekurencyjnych oraz analiza ich własności, wyznaczania stanów optymalnych i ekstremalnych;
- opanowanie umiejętności odczytywania własności związków opisanych wykresami, diagramami itp., konstruowanie wykresów;
- nauczenie wykonywania działań na liczbach i wyrażeniach algebraicznych;
- opanowanie umiejętności sporządzania notatek;
- opanowanie umiejętności korzystania z opracowań podręcznikowych, pomocy naukowych, komputera, kalkulatora itp.

### Procesy wychowawcze

- nauka dobrej organizacji pracy, wytrwałości i systematyczności w dążeniu do osiągnięcia zamierzonych celów;
- kształcenie umiejętności logicznego rozumowania;
- wyrabianie samodzielności, dociekliwości i krytycyzmu;
- rozwijanie zdolności poznawczych;
- pobudzanie aktywności umysłowej;

- rozwijanie umiejętności prezentowania wyników własnej pracy i dowodzenia racji z wykorzystaniem precyzyjnego języka matematyki;
- rozwijanie umiejętności pracy i współpracy w zespole oraz prowadzenia dyskusji z wykorzystaniem argumentów merytorycznych.

## Procedury osiągnięcia celów

Planując cykl lekcji poświęconych konkretnemu zagadnieniu (np. pojęciu funkcji, zastosowaniom trygonometrii itp.), warto przeznaczyć czas na powtórzenie i usystematyzowanie omówionego wcześniej materiału dotyczącego danego hasła programowego. Materiał ten można rozszerzyć o ciekawsze i trudniejsze zadania.

Przy wprowadzaniu oraz omawianiu nowych pojęć bardzo ważne jest stosowanie zasady stopniowania trudności. Utrwalenie nowych pojęć zaczynamy od prostych przykładów i zadań, a następnie przechodzimy do coraz bardziej skomplikowanych. W całym procesie nauczania matematyki ważną rolę odgrywa rozwiązywanie zadań. Bardzo istotne jest również zróżnicowanie ich tematyki. Dotyczy to także zadawanych prac domowych. Monotonne powtarzanie tych samych czynności skutecznie niszczy zainteresowanie matematyką i chęć uczenia się jej.

Aby przybliżyć uczniom wprowadzane pojęcia matematyczne, warto zwrócić uwagę na ich powiązanie z życiem codziennym. Bardzo ważne jest, aby tematyka zadań ukazywała sposoby zastosowania matematyki w różnych dziedzinach życia. Warto również, aby uczniowie samodzielnie wyszukiwali informacje matematyczne w materiałach źródłowych, np. świadomie korzystali z danych statystycznych.

Przy omawianiu materiału istotne jest stosowanie w sposób przemyślany i uzasadniony pomocy naukowych – komputera, kalkulatora, tablic matematycznych, najrozmaitszych modeli, plansz, diagramów, wykresów itp. Zamiast wykonywać długie, męczące i nudne rachunki, trzeba ćwiczyć działania na kalkulatorze. Taka umiejętność bez wątpienia bardzo przyda się w życiu każdemu. Należy przy tym zachować proporcje i np. nie posługiwać się kalkulatorem przy robieniu prostych obliczeń.

Poza tradycyjnym prowadzeniem lekcji w formie wykładu warto wprowadzać metody aktywizujące uczniów. Jedną z nich jest praca w małych, 3–4-osobowych grupach. Wspólne zmaganie się z problemem jest skuteczniejsze i mniej stresujące niż wysiłek jednostkowy. Poszukiwanie błędów w pracach swoich i kolegów wyrabia nawyk samodzielnego sprawdzania rozwiązań. Ułatwi to pracę w domu, która powinna stanowić kontynuację zajęć lekcyjnych. Istotne jest

także nauczenie się korzystania z podręczników i zbiorów zadań.

Umiejętność robienia dobrych notatek z wykładu bywa często niedoceniana zarówno przez uczniów, jak i przez nauczycieli. Warto temu zagadnieniu poświęcić więcej uwagi.

W procesie dydaktycznym niezwykle ważne jest utrwalenie i sprawdzenie wiedzy i umiejętności. Służą temu odpowiedzi ustne oraz wszelkiego rodzaju pisemne prace klasowe, w tym testy jednokrotnego i wielokrotnego wyboru.

Należy zwrócić uwagę, by tok nauczania był jak najbardziej zindywidualizowany, szczególnie gdy mamy do czynienia z uczniami o zróżnicowanym stopniu zainteresowań i zdolności. Uczniom słabszym można zaproponować zajęcia wyrównawcze, zaś szczególnie zainteresowanym przedmiotem – zajęcia fakultatywne rozszerzające omawiany w klasie materiał.

Dobierając metody pracy, niezależnie od omawianych zagadnień, warto odpowiedzieć sobie na dwa pytania: przed daną lekcją – czego chcemy dziś uczniów nauczyć, a po niej – czego ich faktycznie nauczyliśmy. Świadomość stawianych sobie celów kształcenia w widoczny sposób zwiększy szansę ich realizacji.

Chcąc osiągnąć cele wychowawcze, należy przede wszystkim pamiętać o tym, że najefektywniej się wychowuje, dając samemu dobry przykład.

# Materiał nauczania i przewidywane umiejętności uczniów

## Klasa I

(5 godz. tygodniowo, razem 190 godz.)

### Treści nauczania

#### I. Liczby

1. Zapis dziesiętny liczby rzeczywistej, zamiana ułamków dziesiętnych okresowych na ułamki zwykłe.
2. Wzory skróconego mnożenia.
3. Nierówności liniowe.
4. Przedziały liczbowe. Pojęcie zbioru.
5. Działania na zbiorach.
6. Pierwiastki. Działania na pierwiastkach. Znoszenie niewymierności z mianownika.
7. Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej.
8. Równania i nierówności z wartością bezwzględną.
9. Równanie i nierówność liniowa z parametrem.
10. O ile procent więcej? Wielkości większe (mniejsze) o  $a$  procent, punkty procentowe.
11. Przybliżenia oraz pojęcie błędu przybliżenia (błąd bezwzględny, błąd względny), szacowanie wartości wyrażeń liczbowych.

#### II. Funkcje

1. Definicja funkcji jako przyporządkowania  $y = f(x)$ , przykłady funkcji, funkcje używane w statystyce opisowej, tabelki, diagramy, funkcje opisujące zjawiska przyrodnicze, ekonomiczne, socjologiczne itp.
2. Dziedzina funkcji i zbiór wartości funkcji, wyznaczanie dziedziny funkcji liczbowej określonej wzorem.
3. Definicja wykresu funkcji liczbowej, wykresy funkcji opisujące zależności w gospodarce i życiu codziennym – uwzględnienie różnych jednostek na osiach. Odczytywanie z wykresu funkcji jej dziedziny i zbioru wartości, a także wartości największej (najmniejszej) osiąganą przez funkcję w dziedzinie lub w określonym przedziale, odczytywanie z wykresu argumentów, dla których funkcja przyjmuje określone wartości

$$(f(x) = m, f(x) > m, f(x) < m).$$

4. Miejsce zerowe funkcji, odczytywanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych.
5. Definicja funkcji monotonicznej na przedziale  $(a; b)$ , wyznaczanie przedziałów monotoniczności funkcji na podstawie jej wykresu.
6. Proporcjonalność odwrotna i jej własności (przykład ważnej funkcji).
7. Przesunięcie wykresu funkcji wzdłuż osi układu współrzędnych.
8. Przekształcanie wykresu funkcji przez symetrie względem osi układu współrzędnych.
9. Wykresy funkcji  $y = |f(x)|$ .
10. Wektory. Wektory w układzie współrzędnych
11. Wykresy funkcji  $y = f(x - p) + q$ . Przesunięcie wykresu funkcji o wektor

### III. Figury na płaszczyźnie

1. Okręgi i proste. Twierdzenie o odcinkach stycznych.
2. Kąty w kole (kąć środkowy, kąć wpisany, kąć między styczną a cięciwą).
3. Okrąg opisany na czworokącie. Okrąg wpisany w czworokąt.
4. Twierdzenie Talesa.
5. Jednokładność.
6. Podobieństwo, cechy podobieństwa trójkątów, związki miarowe w trójkącie prostokątnym.

### IV. Trygonometria

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego.
2. Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego.
3. Funkcje trygonometryczne kąta rozwartego.
4. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.
5. Wzory redukcyjne
6. Miara łukowa kąta
7. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej
8. Wykresy funkcji: sinus, cosinus i tangens.
9. Wykresy funkcji:  $y = c \cdot f(x)$ ,  $y = f(cx)$ .
10. Sinus i cosinus sumy i różnicy kątów. Suma i różnica sinusów i cosinusów kątów.
11. Równania i nierówności trygonometryczne
12. Zastosowania funkcji trygonometrycznych.
13. Twierdzenie sinusów. Twierdzenie cosinusów.



14. Związki miarowe w figurach płaskich: pola wielokątów, pole i obwód koła, obliczanie pól, obwodów i innych związków miarowych z zastosowaniem poznanych wzorów i trygonometrii.

## V. Funkcja liniowa

1. Od proporcjonalności prostej do funkcji  $y = ax$ .
2. Funkcja liniowa, interpretacja jej współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego. Rysowanie wykresów funkcji liniowych. Przesunięcie wykresu funkcji liniowej  $f(x) = ax$  wzdłuż osi układu współrzędnych. Punkty przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych.
3. Wyznaczanie wzoru funkcji liniowej na podstawie jej wykresu (wykorzystanie interpretacji współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego).
4. Równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty.
5. Wykres i własności funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami.
6. Układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi – rozwiązywanie i interpretacja geometryczna. Zadania tekstowe prowadzące do układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi.
7. Wzajemne położenie dwóch prostych.

## Przewidywane umiejętności ucznia

Po ukończeniu klasy pierwszej uczeń powinien:

- przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);
- wykonywać obliczenia na liczbach rzeczywistych, w szczególności na pierwiastkach dowolnego stopnia i stosować prawa działań na pierwiastkach;
- zamieniać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne okresowe i odwrotnie;
- porównywać liczby rzeczywiste;
- stosować wzory skróconego mnożenia na  $(a \pm b)^2$  oraz  $a^2 - b^2$ ;
- szacować wartości wyrażeń liczbowych;
- obliczać błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;
- używać pojęcia przedziału liczbowego, zaznaczać przedziały na osi liczbowej;
- sprawdzić, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności;

- rozwiązywać nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą oraz ich układy i zapisywać wyniki w postaci przedziałów liczbowych;
- rozwiązywać równania i nierówności liniowe z parametrem;
- znać pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną;
- zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu:  $|x - a| = b$ ,  $|x - a| < b$ ,  $|x - a| > b$ ;
- rozwiązywać równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż:  $||x + 1| - 2| = 3$ ,  $|x + 3| + |x - 5| > 12$ ;
- stosować obliczenia procentowe; używać pojęcia punktu procentowego;
- określać funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego;
- rysować wykresy funkcji liczbowych zadanych tabelką;
- obliczać ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu oraz wyznaczać (poznany metodami rozwiązywania równań) argumenty, dla których funkcja przyjmuje daną wartość;
- odczytywać z wykresu funkcji jej własności: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$ ,  $m \in R$ , rozwiązania nierówności:  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ ;
- szkicować wykres funkcji  $f(x) = \frac{a}{x}$  dla danego  $a$ , korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;
- znajdować na podstawie wykresu funkcji jej wartości największe (najmniejsze) w dziedzinie lub jej podzbiórze;
- przekształcać wykresy funkcji (przesunięcia i symetrie względem osi układu);
- szkicować na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  wykresy funkcji:  $y = |f(x)|$ ,  $y = c \cdot f(x)$ ,  $y = f(cx)$ ;
- obliczać współrzędne oraz długość wektora; dodawać i odejmować wektory oraz mnożyć je przez liczbę;
- interpretować geometrycznie działania na wektorach;
- stosować wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji;
- korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych;
- stosować związki pomiędzy: kątem środkowym, kątami wpisanymi i kątem między styczną a cięciwą koła (wyznaczonymi przez ten sam łuk);
- rozpoznawać trójkąty podobne i wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;

- stosować twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;
- stosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;
- znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);
- rozpoznawać figury podobne i jednokładne, wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) ich własności;
- wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ ;
- stosować proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  oraz  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ;
- korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- wyznaczać miarę kąta ostrego, znając wartość funkcji trygonometrycznej tego kąta;
- wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta, znając wartość funkcji trygonometrycznej sinus lub cosinus kąta ostrego;
- stosować miarę łukową, zamieniać miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
- wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego);
- korzystać z okresowości funkcji trygonometrycznych;
- posługiwać się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. przy rozwiązywaniu nierówności typu:  $\sin x > a$ ,  $\cos x \leq a$ ,  $\operatorname{tg} x > a$ );
- stosować wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów;
- rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne typu:  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ,  $\sin 2x + \cos x = 1$ ,  $\cos 2x < \frac{1}{2}$ ;
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi;
- znajdować związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów;
- rysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;

- wyznaczać wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;
- interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
- szkicować wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami i odczytywać własności takiej funkcji z wykresu;
- wyznaczać równanie prostej na płaszczyźnie;
- rozwiązywać układy równań liniowych i znać interpretację geometryczną takich układów w układzie współrzędnych;
- stosować układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań tekstowych.

## Klasa II

(5 godz. tygodniowo, razem 190 godz.)

### Treści nauczania

#### I. Geometria analityczna

1. Równanie prostej w postaci ogólnej  $ax + by + c = 0$  – przejście od wykresu funkcji liniowej, proste  $x = a$ , punkty przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych.
2. Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty płaszczyzny kartezjańskiej.
3. Wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie. Proste równoległe i proste prostopadłe na płaszczyźnie kartezjańskiej. Badanie prostych równoległych i prostych prostopadłych na podstawie ich równań ogólnych.
4. Nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
5. Odległość na płaszczyźnie kartezjańskiej.
6. Współrzędne środka odcinka.
7. Geometria analityczna – zadania – w tym znajdowanie obrazów niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i w symetrii środkowej względem początku układu

#### II. Funkcja kwadratowa

1. Funkcja  $f(x) = ax^2$  ( $a \neq 0$ ) i jej wykres, własności funkcji odczytywane z wykresu: dziedzina, zbiór wartości, wartości największe i wartości najmniejsze w dziedzinie lub na określonym przedziale, przedziały monotoniczności, miejsca zerowe.

2. Wykres funkcji  $y = ax^2 + q$ , odczytywanie z wykresu własności (jw.).
3. Wykres funkcji  $y = a(x - p)^2$ , odczytywanie z wykresu własności (jw.).
4. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej  $y = a(x - p)^2 + q$ , współrzędne wierzchołka paraboli.
5. Postać ogólna funkcji kwadratowej  $y = ax^2 + bx + c$ , wyprowadzenie wzoru
 
$$y = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}.$$
6. Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji kwadratowej w przedziale – zastosowanie w zadaniach tekstowych, wykres funkcji kwadratowej.
7. Równania kwadratowe – niepełne:  $x^2 + a = 0$ ,  $x^2 + bx = 0$ , wyróżnik trójmianu kwadratowego i związek jego znaku z liczbą miejsc zerowych funkcji kwadratowej, wyprowadzenie wzorów na pierwiastki równania kwadratowego.
8. Nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą.
9. Wzory Viète'a.
10. Równania i nierówności kwadratowe z parametrem.
11. Przykłady równań wyższych stopni oraz równań wymiernych prowadzących do równań liniowych lub kwadratowych.
12. Odległość punktu od prostej.
13. Równanie okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ; nierówność opisująca koło.
14. Punkty wspólne prostej i okręgu.

### III. Wielomiany i funkcje wymierne

1. Określenie wielomianu.
2. Działania w zbiorze wielomianów.
3. Pierwiastki wielomianu.
4. Rozkład wielomianu na czynniki (także z wykorzystaniem wzorów na  $(a \mp b)^3$  oraz  $a^3 \mp b^3$ ).
5. Dzielenie wielomianów. Podzielność wielomianu przez dwumian. Schemat Hornera.
6. Zastosowanie twierdzenia Bézouta.
7. Równania wielomianowe
8. Wykresy wielomianów.
9. Nierówności wielomianowe.
10. Funkcja wymierna i jej dziedzina.

11. Dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych. Mnożenie i dzielenie wyrażeń wymiernych.
12. Równania i nierówności wymierne.

#### IV. Funkcje: wykładnicza i logarytmiczna

1. Potęga liczby nieujemnej o wykładniku wymiernym.
2. Działania na potęgach o wykładnikach wymiernych.
3. Funkcja wykładnicza, jej wykres i podstawowe własności.
4. Przykłady równań i nierówności wykładniczych.
5. Pojęcie logarytmu.
6. Własności logarytmów – logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi o wykładniku naturalnym.
7. Wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.
8. Działania na logarytmach.
9. Funkcja logarytmiczna i jej własności.
10. Przykłady równań i nierówności logarytmicznych.

#### V. Ciągi liczbowe

1. Definicja ciągu liczbowego – funkcji, której dziedziną jest zbiór (lub podzbiór) liczb naturalnych, ciąg skończony i nieskończony.
2. Ciąg arytmetyczny, wzór na  $n$ -ty wyraz oraz sumę  $n$  początkowych wyrazów, wyraz środkowy jako średnia arytmetyczna wyrazów sąsiednich, monotoniczność ciągu arytmetycznego.
3. Ciąg geometryczny, wzór na  $n$ -ty wyraz oraz sumę  $n$  początkowych wyrazów, zależność
 
$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}.$$
4. Procent składany, oprocentowanie lokat i kredytów bankowych, sprzedaży ratalnej itp.
5. Ciąg określony wzorem rekurencyjnym.
6. Ciągi zbieżne do zera.
7. Granica ciągu. Działania na granicach ciągów zbieżnych.
8. Szereg geometryczny zbieżny i jego suma.

#### Przewidywane umiejętności ucznia

Po ukończeniu klasy drugiej uczeń powinien:

- wyznaczać równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty na płaszczyźnie (w postaci kierunkowej lub ogólnej);

- obliczać współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych oraz współrzędne punktów przecięcia prostej z osiami układu współrzędnych;
- badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- badać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;
- wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;
- wyznaczać równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;
- wyznaczać współrzędne środka odcinka;
- obliczać odległość dwóch punktów;
- obliczać odległość punktu od prostej;
- posługiwać się równaniem okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  oraz opisywać koła za pomocą nierówności;
- wyznaczać punkty wspólne prostej i okręgu;
- znajdować obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu;
- szkicować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;
- wyznaczać wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;
- interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);
- odczytywać z wykresu własności funkcji kwadratowej – dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, rozwiązania nierówności:  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$ ;
- wyznaczać wartość największą i wartość najmniejszą funkcji kwadratowej określonej na przedziale domkniętym;
- rozwiązywać równania kwadratowe z jedną niewiadomą;
- rozwiązywać nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą;
- dodawać, odejmować i mnożyć wielomiany;
- odczytywać pierwiastki wielomianu z jego postaci iloczynowej;
- dzielić wielomiany przez dwumian  $ax + b$ ;
- rozkładać wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia (także na  $(a \mp b)^3$  oraz  $a^3 \mp b^3$ ) lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;

- stosować twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian  $x - a$ ;
- stosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;
- korzystać z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu  $x^3 - 8 = 0$ ;
- rozwiązywać równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych;
- rozwiązywać łatwe nierówności wielomianowe;
- obliczać wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);
- wyznaczać dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych;
- dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
- rozszerzać i (w łatwych przykładach) skracać wyrażenia wymierne;
- rozwiązywać proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- rozwiązywać proste nierówności wymierne typu:  $\frac{x+1}{x+3} > 2$ ,  $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ ,  
 $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$ ;
- wykorzystywać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);
- obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych;
- stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- korzystać z podstawowych własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczej (o różnych podstawach) i opisywać jej własności;
- korzystać z funkcji wykładniczych do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- korzystać z pojęcia logarytmu
- stosować w obliczeniach wzory na: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;
- stosować w obliczeniach wzór na zamianę podstawy logarytmu;
- szkicować wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw;
- posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;



- wyznaczać wyrazy ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym;
- podawać przykłady ciągów liczbowych skończonych i nieskończonych;
- zbadać, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
- stosować wzory na  $n$ -ty wyraz i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego;
- znać i stosować zależność między trzema sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego;
- stosować własności ciągu geometrycznego do zadań związanych z bankowością (lokaty i kredyty), w szczególności korzystać z pojęcia procentu składanego, obliczać podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym;
- obliczać granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n^2}$  oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów;
- rozpoznawać szeregi geometryczne zbieżne i obliczać ich sumy.

### Klasa III

(5 godz. tygodniowo, razem 140 godz.)

#### Treści nauczania

##### I. Kombinatoryka; rachunek prawdopodobieństwa oraz elementy statystyki opisowej

1. Zadania kombinatoryczne uwzględniające losowanie kolejno ze zwracaniem i bez zwracania oraz losowania podzbiorów danego zbioru.
2. Zasada mnożenia.
3. Doświadczenia losowe, zdarzenia losowe, zbiór zdarzeń elementarnych, działania na zdarzeniach – zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe, koniunkcja i alternatywa zdarzeń, zdarzenie przeciwne, zdarzenia wykluczające się.
4. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa i jego podstawowe własności.
5. Obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń w skończonych przestrzeniach probabilistycznych, zastosowanie własności prawdopodobieństwa.
6. Prawdopodobieństwo warunkowe.
7. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym.

8. Elementy statystyki opisowej – badanie próby losowej i jej opis za pomocą liczb charakterystycznych, średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariancja i odchylenie standardowe, przykłady badań statystycznych GUS.

## II. Rachunek różniczkowy

1. Granica funkcji w punkcie.
2. Granice niewłaściwe.
3. Twierdzenia o działaniach na granicach.
4. Obliczanie granic funkcji.
5. Funkcje ciągłe.
6. Pochodna funkcji w punkcie.
7. Obliczanie pochodnych funkcji wymiernych.
8. Geometryczna i fizyczna interpretacja pochodnej.
9. Znak pochodnej a monotoniczność funkcji.
10. Ekstremum funkcji.
11. Zagadnienia optymalizacyjne.

## III. Stereometria

1. Równoległość i prostopadłość w przestrzeni.
2. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych.
3. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny.
4. Kąt dwuścienny.
5. Graniastosłupy – powtórzenie podstawowych własności, graniastosłupy prawidłowe i proste, prostopadłościanny.
6. Ostrosłupy – powtórzenie podstawowych własności, ostrosłupy prawidłowe, twierdzenie o ostrosłupie, który ma wszystkie krawędzie boczne równej długości.
7. Przekroje graniastosłupów i ostrosłupów płaszczyzną
8. Objętości i pola powierzchni wielościanów – powtórzenie wzorów, obliczenia również z zastosowaniem trygonometrii.
9. Walec, stożek – powtórzenie podstawowych własności, objętości i pola powierzchni, obliczenia również z zastosowaniem trygonometrii;
10. Kula – powtórzenie podstawowych własności, objętość i pole powierzchni; przekrój sfery płaszczyzną.

## IV. Powtórzenie przed maturą

### Przewidywane umiejętności ucznia

Po ukończeniu klasy trzeciej uczeń powinien:

- zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych; wykorzystywać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych;
- stosować zasadę mnożenia i dodawania;
- obliczać prawdopodobieństwo w przykładach wykorzystujących klasyczną definicję prawdopodobieństwa;
- obliczać prawdopodobieństwo warunkowe;
- korzystać z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym
- krytycznie analizować dane doświadczalne (badania statystyczne) i ich graficzne reprezentacje, operować podstawowymi charakterystykami liczbowymi zestawów danych,
- obliczać średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretować te parametry dla danych empirycznych;
- obliczać granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;
- obliczać pochodne funkcji wymiernych;
- korzystać z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;
- korzystać z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;
- znajdować ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;
- stosować pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych;
- rozpoznawać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), obliczać miary tych kątów;
- rozpoznawać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczać miary tych kątów;
- rozpoznawać w walcach i w stożkach kąty między odcinkami oraz kąty między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą stożka), obliczać miary tych kątów;
- rozpoznawać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;
- określać, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;

- określać, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;
- określać, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.
- stosować trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości;

## Propozycja metod kontroli i oceny osiągnięć

Jednym z najtrudniejszych zadań stojących przed nauczycielem jest sprawdzanie i ocenianie osiągnięć uczniów. Jego prawidłowe wykonanie jest niezbędne dla:

- ucznia, gdyż potwierdza lub kwestionuje jego samoocenę (a tym samym uczy właściwego oceniania samego siebie); jest sygnałem do uzupełnienia niedociągnięć; motywuje do dalszego kształcenia oraz rozwijania własnych uzdolnień i zainteresowań;
- nauczyciela, gdyż dostarcza informacji o poprawności stosowanych metod nauczania oraz stopniu osiągnięcia zamierzonych celów edukacyjnych.

Matematyka jest dyscypliną nauki, w której umiejętności tylko pozornie są łatwe do oceny. Częstym błędem jest na przykład klasyfikowanie pisemnych rozwiązań zadań wyłącznie w dwóch kategoriach – jako zrobione błędnie albo bezbłędnie. Tymczasem można tak postępować tylko w stosunku do odpowiedzi w testach. Największą trudność sprawia ustalenie, na ile uczeń rozumie to, co robi. Bardzo ważne jest więc stawianie mu pytań sprawdzających zrozumienie kolejnych etapów pracy.

Z powyższych uwag wynika, że metody sprawdzania osiągnięć ucznia powinny być różnorodne. Nie należy przy tym każdego sprawdzania umiejętności kończyć oceną wyrażoną stopniem. Uczeń powinien kształcić się na własnych błędach oraz twórczo poszukiwać właściwych rozwiązań. Pod żadnym pozorem nie można dopuścić do sytuacji, w której strach przed negatywną oceną paraliżuje i odbiera chęć aktywnego uczestniczenia w lekcji. Swobodne wypowiedzi są dla nauczyciela dobrą wskazówką, czy proces dydaktyczny przebiega prawidłowo.

Uczniom warto zadać przygotowanie publicznej prezentacji rozwiązania problemu, który wcześniej opracują w 2–3-osobowych grupach. Takie zadanie skutecznie motywuje do dokładnego zrozumienia tematu. Podczas prezentowania wyników pracy przez jednego z członków grupy, należy bardzo dociekliwie pytać: „skąd ten wniosek?”, „dlaczego?”, „czy zawsze?”, „czy dla dowolnych?” itp. Na ogół uczniowie, przyzwyczajeni do takiej formy pracy, stawiają sobie nawzajem podobne pytania podczas przygotowywania prezentacji. Jest to bardzo efektywny sposób nauki, a dla nauczyciela prezentacja jest jedną z najlepszych metod sprawdzenia, czy pojęcia lub teorie matematyczne, zwłaszcza trudniejsze, zostały dobrze zrozumiane.

Uczniom należy zadawać pracę do domu. Jest to konieczne ze względu na zbyt duży zakres materiału w stosunku do liczby godzin. Praca taka spełni swoje zadanie, o ile nauczyciel będzie kontrolował poprawność jej wykonania, co nie powinno jednak łączyć się ze stopniem.

Nie należy rezygnować z tradycyjnej formy odpowiedzi ustnej ocenianej stopniem. Uczeń powinien umieć prezentować swoje umiejętności nawet w sytuacji związanej z dużym stresem. Warto tak zaplanować lekcje, aby w ciągu semestru każdy otrzymał przynajmniej jedną ocenę z odpowiedzi ustnej.

Pisemne sprawdziany wiadomości to zwykle kartkówki, prace klasowe oraz różnego rodzaju testy. Krótkie kartkówki są wygodną formą kontroli umiejętności nabytych w trakcie ostatnich (3–4) lekcji. Powinny być raczej oceną sprawności rachunkowej, znajomości i stosowania definicji itp. niż rozwiązywaniem zadań problemowych. Po większej partii materiału przeprowadza się na ogół godzinne prace klasowe. Przygotowanie prawidłowego zestawu zadań jest dla nauczyciela swoistym wyzwaniem, gdyż:

- liczba zadań nie powinna przekraczać trzech, czterech;
- zadania powinny mieć zróżnicowany stopień trudności;
- rozwiązania powinny dać możliwość oceny pracy w pełnej skali, od niedostatecznej do celującej;
- część z postawionych problemów powinna dawać szansę na wykazanie się myśleniem twórczym.

To tylko niektóre z cech dobrze opracowanej pracy klasowej.

Coraz częściej spotykaną formą pracy pisemnej są testy. Młodzi ludzie, wcześniej czy później, spotkają się z tą formą sprawdzianu, warto więc ćwiczyć z nimi umiejętność ich rozwiązywania. Praktyka dowodzi, że bez wcześniejszego treningu trudno jest, nawet osobie dobrze przygotowanej merytorycznie, prawidłowo rozwiązać egzamin testowy.

Zdaniem autora niezwykle ważne jest staranne, rzetelne, w pełni profesjonalne przygotowanie każdego sprawdzianu. Stosując obowiązujący w Polsce system oceniania, warto zadbać o przejrzystość kryteriów i konsekwencję w ich stosowaniu. Wiadomo, jak bardzo potrafi zniechęcić do dalszej nauki niesprawiedliwa lub nieuzasadniona ocena.

Zadaniem każdego nauczyciela jest opracowanie na początku roku szkolnego Przedmiotowego Systemu Oceniania zgodnego z Wewnątrzszkolnym Systemem Oceniania. Obydwa dokumenty, zatwierdzone przez Radę Pedagogiczną, powinny uwzględniać specyfikę szkoły, środowisko uczniów, profil klasy itp. Szczegółowe zasady oceniania wewnątrzszkolnego określa statut szkoły, z uwzględnieniem przepisów rozporządzenia Ministra Edukacji Narodowej z dnia 19 kwietnia 1999 r. (z późniejszymi zmianami). Prezentowany poniżej katalog wymagań programowych należy zatem traktować wyłącznie jako propozycję do rozważenia wymagającą dopasowania do sytuacji każdej klasy. Dotyczy to zwłaszcza podziału wymagań na dwie kategorie – podstawowe i ponadpodstawowe.

# Katalog wymagań programowych

## LICZBY RZECZYWISTE

Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:

- przedstawiać liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg)
- zamieniać ułamek zwykły na ułamek dziesiętny
- podać przykłady liczb niewymiernych
- podać przybliżenie dziesiętne liczby (np. korzystając z kalkulatora) z zadaną dokładnością
- stosować kolejność działań w zbiorze liczb rzeczywistych
- stosować wzory skróconego mnożenia na  $(a \pm b)^2$  oraz  $a^2 - b^2$
- porównać liczby wymierne
- porównać liczby rzeczywiste (np. korzystając z kalkulatora)
- usuwać niewymierność w wyrażeniu typu  $\frac{1}{\sqrt{a}}$
- wskazać różnicę między definicją pierwiastka stopnia parzystego a definicją pierwiastka stopnia nieparzystego
- wykonać działania na pierwiastkach
- stosować prawa działań na pierwiastkach
- wyłączać czynnik spod pierwiastka
- włączać czynnik pod pierwiastek
- obliczać potęgi o wykładnikach wymiernych
- stosować prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych
- korzystać z podstawowych własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką)
- stosować pojęcie logarytmu
- stosować wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym
- zaznaczyć przedziały liczbowe na osi liczbowej
- obliczyć wartość bezwzględną liczby rzeczywistej
- obliczyć odległość dwóch liczb na osi liczbowej
- obliczyć  $p\%$  danej wielkości  $w$
- obliczyć wielkość  $w$ , gdy dany jest jej procent

- obliczyć, jakim procentem wielkości  $w$  jest wielkość  $a$
- wykonać w pamięci proste obliczenia typu: o 50% więcej niż 10, o 200% więcej niż 15, o 20% mniej niż 50 itp.
- prawidłowo odczytać informacje zawarte w różnego rodzaju diagramach statystycznych
- obliczyć błąd bezwzględny i względny przybliżenia
- oszacować wartość wyrażenia liczbowego
- przekształcić proste wyrażenia algebraiczne
- sprawdzić, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania, nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- rozwiązać równanie i nierówność pierwszego stopnia z jedną niewiadomą
- rozwiązać układ nierówności pierwszego stopnia i zapisać wynik w postaci przedziału liczbowego
- ułożyć równanie do zależności opisanej słownie
- korzystać z pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometryczną
- zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu:  $|x - a| = b$ ,  $|x - a| < b$ ,  $|x - a| > b$

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- zamienić ułamek dziesiętny okresowy na ułamek zwykły
- odróżnić liczbę wymierną od niewymiernej
- wyznaczyć na osi liczbowej daną liczbę wymierną
- rozwiązać zadania wymagające użycia notacji wykładniczej
- korzystać z podstawowych własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką)
- konstruować odcinki o długości  $\sqrt{n}$ ,  $n \in N$
- usuwać niewymierność w mianowniku wyrażenia typu:  $\frac{d}{a + b\sqrt{c}}$
- prawidłowo zastosować definicję  $\sqrt{x^2} = |x|$  podczas przekształcania wyrażeń algebraicznych
- rozwiązać zadanie tekstowe wymagające zastosowania pierwiastków wyższych stopni
- porównać pierwiastki (bez stosowania kalkulatora)
- krytycznie czytać teksty zawierające uśrednione dane
- obliczyć, o ile procent wielkość  $a$  jest większa (mniejsza) od wielkości  $b$



- swobodnie operować pojęciem punktu procentowego
- krytycznie czytać teksty zawierające i komentujące dane procentowe
- rozwiązać złożone zadania tekstowe prowadzące do równania (układu równań) z wykorzystaniem obliczeń procentowych
- przeprowadzić proste badanie statystyczne, opracować i zaprezentować jego wyniki
- ocenić dokładność zastosowanego przybliżenia
- zastosować w obliczeniach wzór na zamianę podstawy logarytmu
- rozwiązać równanie i nierówność liniową z parametrem  $|x - a| = b$ ,  $|x - a| < b$ ,  $|x - a| > b$
- rozwiązać równanie i nierówność z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż:  $||x + 1| - 2| = 3$ ,  $|x + 3| + |x - 5| > 12$

## FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:

- rozpoznać funkcje wśród przyporządkowań
- podać przykłady zależności funkcyjnych w otaczającej nas rzeczywistości
- określać funkcje na różne sposoby (diagram, tabela, wzór, wykres, opis słowny)
- obliczyć wartości funkcji dla różnych argumentów
- wyznaczyć dziedzinę funkcji na podstawie diagramu, tabeli, opisu słownego
- wyznaczyć, w prostych przypadkach, dziedzinę na podstawie wzoru funkcji
- znaleźć, w prostych przypadkach, zbiór wartości funkcji o danej dziedzinie i wzorze
- swobodnie operować układem współrzędnych
- rozpoznać funkcje wśród krzywych
- sporządzić wykresy funkcji o kilkuelementowej dziedzinie
- na podstawie wykresu funkcji odczytać jej dziedzinę
- na podstawie wykresu funkcji odczytać zbiór jej wartości
- na podstawie wykresu funkcji wskazać największą wartość funkcji i najmniejszą wartość funkcji (w całej dziedzinie lub w podanym przedziale)
- na podstawie wykresu funkcji odczytać jej miejsca zerowe
- znajdować miejsca zerowe funkcji w przypadku, gdy prowadzi to do rozwiązywania równań liniowych
- posługując się poznanymi metodami rozwiązywania równań, obliczać, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość

- na podstawie wykresu funkcji określić liczbę rozwiązań równania  $f(x)=m$  dla ustalonej wartości  $m$
- odczytać z wykresu funkcji rozwiązania nierówności:  $f(x)>m$ ,  $f(x)\leq m$  dla ustalonej wartości  $m$  (w szczególności dla  $m=0$ )
- określić przedziały monotoniczności funkcji na podstawie jej wykresu
- przesunąć wykres funkcji wzdłuż osi  $x$  zgodnie ze wzorem  $y=f(x-a)$
- przesunąć wykres funkcji wzdłuż osi  $y$  zgodnie ze wzorem  $y=f(x)+b$
- narysować wykresy funkcji  $y=-f(x)$  oraz  $y=f(-x)$ , mając dany wykres funkcji  $y=f(x)$
- obliczyć współrzędne oraz długość wektora; dodać i odjąć wektory oraz pomnożyć je przez liczbę;
- szkicować wykres funkcji  $f(x)=\frac{a}{x}$  dla danego  $a$ , korzystać ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczych (przy różnych podstawach) i opisywać ich własności
- sporządzać wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw
- posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- wyznaczyć zbiór wartości funkcji zdefiniowanych w bardziej złożony sposób
- znaleźć na podstawie zadania tekstowego zależność funkcyjną między dwiema wielkościami i wyznaczyć dziedzinę otrzymanej funkcji
- narysować wykres funkcji na podstawie wykonanych pomiarów różnych zjawisk
- na podstawie wykresu funkcji określić liczbę rozwiązań równania  $f(x)=m$  w zależności od wartości  $m$
- narysować wykres funkcji  $y=f(x-a)+b$ , mając dany wykres funkcji  $y=f(x)$ ; stosować wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji
- narysować na podstawie wykresu funkcji  $y=f(x)$  wykresy funkcji:  $y=|f(x)|$ ,  $y=c\cdot f(x)$ ,  $y=f(cx)$
- zinterpretować geometrycznie działania na wektorach

- uzasadnić, że funkcja  $f(x) = \frac{1}{x}$  nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie
- odczytać z wykresów funkcji rozwiązania równań i nierówności typu:  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x) < g(x)$ ,  $f(x) > g(x)$
- zaprojektować wykresy funkcji o zadanych własnościach

## FUNKCJA LINIOWA

### Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:

- rozpoznać wielkości wprost proporcjonalne
- narysować wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru i omówić jej własności
- podać wzór funkcji liniowej na podstawie jej wykresu
- podać zależność funkcyjną między wielkościami wprost proporcjonalnymi opisanymi w zadaniu tekstowym
- sprawdzić rachunkowo, czy dany punkt leży na danej prostej
- wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty
- obliczyć współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji liniowej z osiami układu współrzędnych
- sprawdzić współliniowość punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej
- interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej
- rozwiązać układy równań liniowych i znać interpretację geometryczną takich układów w układzie współrzędnych

### Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:

- przeanalizować, jak – w zależności od współczynników (zapisanych w postaci parametrów) funkcji liniowej – zmieniają się jej własności
- szkicować wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami i odczytywać własności takiej funkcji z wykresu
- rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

## GEOMETRIA ANALITYCZNA

### Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:

- wyznaczyć równanie prostej w postaci ogólnej

- zbadać wzajemne położenie dwóch prostych na płaszczyźnie
- obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych
- obliczyć współrzędne wierzchołków wielokątów, mając dane równania ich boków
- wyznaczyć równanie prostej równoległej i prostej prostopadłej do danej prostej i przechodzącej przez dany punkt (w postaci kierunkowej i ogólnej)
- wyznaczyć czwarty wierzchołek równoległoboku, mając dane trzy pozostałe
- obliczyć odległość dwóch punktów na płaszczyźnie kartezjańskiej
- obliczyć obwód wielokąta o danych wierzchołkach
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka, znając współrzędne jego końców
- wyznaczyć współrzędne końca odcinka, znając współrzędne jego środka i drugiego końca
- obliczyć pole trójkąta prostokątnego o danych wierzchołkach
- znaleźć obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu
- wyznaczyć równanie okręgu  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  oraz opisać koło za pomocą nierówności

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- obliczyć odległość punktu od prostej
- obliczyć pole trójkąta o danych wierzchołkach
- wyznaczyć punkty wspólne prostej i okręgu

**FUNKCJA KWADRATOWA**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- narysować wykres funkcji  $f(x) = ax^2$  ( $x \in R, a \neq 0$ ) i podać jej własności
- narysować wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru
- wyznaczyć wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie
- określić własności (zbiór wartości, przedziały monotoniczności, wartość ekstremalną) funkcji kwadratowej na podstawie jej postaci kanonicznej
- przekształcić wzór funkcji kwadratowej z postaci kanonicznej do ogólnej i odwrotnie
- obliczyć współrzędne wierzchołka paraboli  $y = ax^2 + bx + c$

- interpretować współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje)
- wyznaczyć wartość największą i wartość najmniejszą funkcji kwadratowej w podanym przedziale
- rozwiązać równanie kwadratowe niepełne ( $ax^2 + bx = 0$ ,  $ax^2 + c = 0$ ) metodą rozkładu na czynniki
- określić liczbę pierwiastków równania kwadratowego na podstawie znaku wyróżnika
- rozwiązać równanie kwadratowe z jedną niewiadomą za pomocą wzorów na pierwiastki
- sprowadzić funkcję kwadratową do postaci iloczynowej (o ile istnieje)
- odczytać miejsca zerowe funkcji kwadratowej z jej postaci iloczynowej
- rozwiązać nierówność kwadratową z jedną niewiadomą
- wykorzystać własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym)

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- przekształcić parabolę przez symetrię względem osi  $x$  lub osi  $y$  układu współrzędnych oraz napisać równanie otrzymanego obrazu tej paraboli
- znaleźć brakujące współczynniki funkcji kwadratowej na podstawie różnych informacji o jej wykresie
- rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do szukania wartości ekstremalnych funkcji kwadratowej
- rozwiązać zadanie tekstowe prowadzące do równania kwadratowego

**WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- dodać, odjąć i pomnożyć wielomiany
- odczytać pierwiastki wielomianu z jego postaci iloczynowej
- podzielić wielomian przez dwumian  $ax + b$
- rozłożyć wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias
- stosować twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian  $x - a$
- stosować twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych

- rozwiązać równanie wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równania kwadratowego
- rozwiązać łatwą nierówność wielomianową
- obliczyć wartość wyrażenia arytmetycznego (wymiernego)
- wyznaczyć dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych
- dodać, odjąć, pomnożyć i podzielić wyrażenia wymierne
- rozszerzyć i (w łatwych przykładach) skrócić wyrażenie wymierne
- rozwiązać proste równania wymierne prowadzące do równania liniowego lub kwadratowego
- rozwiązać prostą nierówność wymierną typu:  $\frac{x+1}{x+3} > 2$ ,  $\frac{x+3}{x^2-16} < \frac{2x}{x^2-4x}$ ,  $\frac{3x-2}{4x-7} \leq \frac{1-3x}{5-4x}$

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- rozwiązać równanie i nierówność kwadratową z parametrem
- rozwiązać trudniejsze równanie lub nierówność wielomianową
- rozwiązać trudniejsze równanie lub nierówność wymierną

**PLANIMETRIA**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- określić wzajemne położenie dwóch okręgów
- określić wzajemne położenie okręgu i prostej
- korzystać z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych
- wskazać kąty środkowe i wpisane oparte na danych łukach
- zastosować twierdzenie o zależności między kątem środkowym, kątami wpisanymi i kątem między styczną a cięciwą (wyznaczonymi przez ten sam łuk)
- rozpoznać trójkąty podobne i wykorzystać (także w kontekście praktycznym) cechy podobieństwa trójkątów
- poprawnie zapisać proporcje boków w trójkątach podobnych
- korzystać z twierdzenia Pitagorasa oraz związków miarowych w trójkącie prostokątnym
- obliczyć długości boków figur podobnych, wykorzystując skalę podobieństwa
- oszacować rzeczywistą odległość między punktami, znając odległość między tymi punktami na mapie i skalę mapy

- zastosować w zadaniach twierdzenie o stosunku pól figur podobnych
- zastosować twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu
- zastosować twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczenia długości odcinków i ustalenia równoległości prostych;
- znaleźć obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);
- rozpoznać figury podobne i jednokładne, wykorzystywać (także w kontekstach praktycznych) ich własności;
- wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od  $0^\circ$  do  $180^\circ$
- obliczyć długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, mając dany jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych
- podać wartości funkcji trygonometrycznych kątów:  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $45^\circ$
- korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora)
- obliczyć miarę kąta ostrego, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo - korzystając z tablic lub kalkulatora - przybliżoną)
- stosować podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  oraz  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- znając wartość funkcji trygonometrycznej sinus lub cosinus kąta ostrego, wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta
- korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi
- udowodnić prostą tożsamość trygonometryczną
- zastosować miarę łukową, zamienić miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie
- wyznaczać wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego)
- korzystać z okresowości funkcji trygonometrycznych
- posługiwać się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. przy rozwiązywaniu nierówności typu:  $\sin x > a$ ,  $\cos x \leq a$ ,  $\operatorname{tg} x > a$ )

- stosować wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów
- rozwiązywać równania i nierówności trygonometryczne typu:  $\sin 2x = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 2x < \frac{1}{2}$

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- udowodnić twierdzenie o odcinkach stycznych
- wyprowadzić związki miarowe w trójkącie prostokątnym
- skonstruować odcinek o długości równej średniej geometrycznej dwóch danych odcinków
- swobodnie operować skalą map
- stosować podobieństwo trójkątów w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności
- rozwiązać trudniejsze równania i nierówności trygonometryczne

**CIĄGI**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- wyznaczać wyrazy ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym
- rozpoznać ciąg arytmetyczny
- obliczyć  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, znając pierwszy wyraz i różnicę
- wyznaczyć ciąg arytmetyczny, znając jego dwa wyrazy
- obliczyć sumę  $n$  początkowych wyrazów danego ciągu arytmetycznego
- rozpoznać ciąg geometryczny
- obliczyć  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego, znając pierwszy wyraz i iloraz
- wyznaczyć ciąg geometryczny, znając jego dwa wyrazy
- obliczyć sumę  $n$  początkowych wyrazów danego ciągu geometrycznego
- rozwiązać proste zadanie tekstowe, w którym dane wielkości są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego
- wyznaczyć wielkości zmieniające się zgodnie z zasadą procentu składanego
- obliczyć wartość lokaty, znając stopę procentową, okres rozrachunkowy i czas oszczędzania
- obliczyć granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n^2}$  oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów
- rozpoznać szereg geometryczny zbieżny i obliczyć jego sumę



**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- wyznaczyć ciąg arytmetyczny, znając np. jeden z jego wyrazów i iloczyn pewnych dwóch wyrazów lub dwie sumy częściowe itp.
- obliczyć, ile wyrazów danego ciągu arytmetycznego należy dodać, aby otrzymać określoną sumę
- zastosować w zadaniach zależność między wyrazami  $a_{n-k}, a_n, a_{n+k}$  ciągu arytmetycznego lub ciągu geometrycznego
- rozwiązać zadania wymagające jednoczesnego stosowania własności ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego
- obliczyć wartość lokaty o zmieniającym się oprocentowaniu
- obliczyć wysokość raty kredytu spłacanego (w równych wielkościach) systemem procentu składanego
- obliczyć wysokości rat malejących
- porównać zyski z różnych lokat i różne sposoby spłacania kredytu

**RACHUNEK RÓŻNICZKOWY**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- obliczyć granicę funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych
- obliczyć pochodną funkcji wymiernej
- skorzystać z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji
- wyznaczać ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- podać geometryczną i fizyczną interpretację pochodnej
- zastosować pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych

**RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA I STATYSTYKA**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- zliczyć obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych
- stosować zasadę mnożenia i dodawania
- rozpoznać, czy dana sytuacja jest doświadczeniem losowym

- określić zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego
- obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  ( $A \subset \Omega$ ) z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa
- rozpoznać zdarzenia wykluczające się
- obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe
- wyznaczyć medianę, dominantę, średnią i rozstęp danych surowych
- obliczyć średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych) oraz zinterpretować te parametry dla danych empirycznych
- odczytać podstawowe informacje z wykresu, diagramu, histogramu
- zaprezentować dane w postaci diagramu kołowego, diagramu słupkowego, wykresu
- narysować histogram

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- wykorzystać wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych
- zastosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń
- zastosować w zadaniach wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego
- obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, korzystając z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym
- rozwiązać zadania dotyczące średniej ważonej (np. znajdować brakujące wagi)
- narysować histogram wymagający zgrupowania danych w klasy
- porównać różne zestawy danych surowych na podstawie opisujących je parametrów (w prostych przypadkach)

**STEREOMETRIA**

**Na poziomie wymagań podstawowych uczeń potrafi:**

- wskazać płaszczyzny równoległe i prostopadłe do danej płaszczyzny
- wskazać proste równoległe i prostopadłe do danej płaszczyzny
- odróżnić proste równoległe od prostych skośnych
- wskazać proste prostopadłe w przestrzeni
- rozpoznać graniastosłupy proste i pochyłe, równoległościanny i prostopadłościanny
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami,

krawędziami i przekątnymi, itp.), obliczyć miary tych kątów

- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), obliczyć miary tych kątów
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami
- określić, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną
- określić, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną
- określić, jaką figurą jest dany przekrój graniastosłupa płaszczyzną
- określić, jaką figurą jest dany przekrój ostrosłupa płaszczyzną
- wskazać promień podstawy, wysokość i tworzącą walca oraz stożka; zastosować w zadaniach związki między nimi
- rozpoznać w walcach i w stożkach kąty między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), obliczyć miary tych kątów
- zastosować funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków i miar kątów w bryłach
- obliczyć objętość i pole powierzchni graniastosłupa, ostrosłupa, walca, stożka i kuli

**Na poziomie wymagań ponadpodstawowych uczeń potrafi:**

- wyznaczyć kąt nachylenia odcinka w graniastosłupie do ściany niebędącej podstawą graniastosłupa
- wyznaczyć kąt dwuścienny między ścianami bocznymi ostrosłupa
- rozpoznać wielościany foremne i opisać ich podstawowe własności
- rysować siatki graniastosłupów i ostrosłupów wypukłych
- zastosować w zadaniach związki między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupów i ostrosłupów wypukłych
- zbadać własności brył powstałych z obrotu wokół osi różnych figur płaskich
- wyznaczyć objętości i pola powierzchni brył, w których dane mają postać wyrażeń algebraicznych i doprowadzić wyniki do prostej postaci

## Orientacyjny przydział godzin lekcyjnych

### **KLASA I**

5 godz. × 38 tyg. = 190 godzin

Liczby rzeczywiste	28
Funkcje i ich własności	31
Planimetria	21
Trygonometria	39
Funkcja liniowa	11
Godziny do dyspozycji nauczyciela	

### **KLASA II**

5 godz. × 38 tyg. = 190 godzin

Geometria analityczna	16
Funkcja kwadratowa	37
Wielomiany i funkcje wymierne	32
Funkcje: wykładnicza i logarytmiczna	17
Ciągi	31
Godziny do dyspozycji nauczyciela	

### **KLASA III**

5 godz. × 28 tyg. = 140 godzin

Rachunek prawdopodobieństwa i elementy statystyki opisowej	31
Rachunek różniczkowy	28
Stereometria	21
Powtórzenie materiału przed maturą	